

ЛИТЕРАТУРА

1. Блюмин С.Л., Шмырин А.М., Шмырина О.А. Билинейные окрестностные системы. Липецк: ЛГТУ, 2006. 130 с.
2. Блюмин С.Л., Шмырин А.М., Седых И.А., Филоненко В.Ю. Окрестностное моделирование сетей Петри. Липецк: ЛЭГИ, 2010. 124 с.
3. Шмырин А.М., Седых И.А., Корниенко Н.А., Шмырина Т.А. Обобщение дискретных моделей окрестностными системами // Материалы конференции с международным участием «Технические и программные средства систем управления, контроля и измерения» (УКИ 10). М.: ИПУ РАН, 2010. С. 207-208.
4. Шмырин А.М., Седых И.А. Дискретные модели в классе окрестностных систем // Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки. Тамбов, 2012. Т. 17. Вып. 3. С. 867-871.

Поступила в редакцию 10 ноября 2012 г.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 11-08-97525 р-центр_а).

Shmyrin A.M., Sedykh I.A., Kavygin V.V., Tyurin V.M., Vasilyev V.B., Royenko S.S. PARAMETRICAL IDENTIFICATION OF BILINEAR NEIGHBORHOOD MODEL OF TEMPERATURE CALCULATION OF REELING OF STRIP ON CAMP

Bilinear neighbourhood models are considered. Parametrical identification of bilinear neighbourhood model of calculation of temperature of a reeling of a strip on a camp is carried out.

Key words: bilinear neighbourhood systems; parametrical identification.

УДК 519.854

ОКРЕСТНОСТНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВУМЕРНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

© А. М. Шмырин, И. А. Седых, В. М. Тюрин, В. Б. Васильев, А. П. Щербаков

Ключевые слова: окрестностные системы; динамическая система; дискретное отображение; итерационная последовательность.

Рассматриваются вопросы перехода от распределенных динамических систем к окрестностным системам, их моделирование билинейными окрестностными системами, показано, что динамические системы могут быть проанализированы с применением окрестностного подхода.

Введение

Теория систем с нелинейной динамикой представляет большой интерес, т. к. процессы нелинейные связи и закономерности были выявлены помимо технических и физических систем, также в биологических, экономических, социальных и других сферах.

Указанная теория включает такие разделы, как теория хаоса и бифуркаций, теория аттракторов и фракталов, процессы самоорганизации и катастроф. Данными проблемами одними из первых начали заниматься И. Пригожин, Г. Хакен, предложившие использовать

термин «синергетика» для описания закономерностей процессов эволюции и самоорганизации нелинейных систем. Этот термин стал обозначать научную область, в которую и входят приведенные выше теории. В России вопросами динамических систем и синергетики занимались В.И. Арнольд, С.П. Курдюмов, Г.Г. Малинецкий и др.

В данной работе предпринята попытка продемонстрировать факт связи нелинейных динамических систем, в частности систем с квадратичной нелинейностью, с окрестностными системами.

Рассмотрим две двумерные итерационные модели динамических систем, применяемые в экологии: двумерную модель Ферхюльста–Пирла для случая двух взаимодействующих популяций [1] и отображение Эно, учитывающее влияние на численность популяции двух предшествующих лет [2].

1. Распределенные динамические системы

Распределенные системы любой природы, как правило, описываются системами уравнений с несколькими переменными. Для случая разностных отображений систему с двумя переменными можно представить следующим образом:

$$\begin{cases} x_{n+1} = f_1(x_n, y_n); \\ y_{n+1} = f_2(x_n, y_n). \end{cases} \quad (1)$$

Двумерная модель Ферхюльста–Пирла является расширением одномерного отображения Ферхюльста–Пирла, называемого также логистическим отображением, и имеет вид:

$$\begin{cases} y_{n+1} = \alpha x_n(1 - x_n); \\ x_{n+1} = \beta y_{n+1}(1 - y_{n+1}). \end{cases} \quad (2)$$

Здесь x_n – численность одного вида, а y_n – другого в n -м году ($x, y \in [0, 1]$); α и β – некоторые параметры (коэффициенты) модели.

Авторы работы [1] представили аналитическое решение данной системы, представив ее в виде системы нелинейных уравнений вида:

$$\begin{cases} y = \alpha x(1 - x); \\ x = \beta y(1 - y). \end{cases} \quad (3)$$

В случае системы двух логистических отображений наблюдается зависимость поведения от параметров α и β . Если положить $\beta = \alpha$, то система (3) будет иметь вид

$$x_{n+1} = \alpha^2 x_n(1 - x_n)[1 - \alpha x_n(1 - x_n)],$$

и является второй итерацией отображения Ферхюльста–Пирла. Как показано в [1], зависимость решения от параметра α будет следующей: для $0 \leq \alpha \leq 1$ система имеет один нулевой корень $x_1 = 0$, для $1 < \alpha < 3$ нулевой неустойчивый и устойчивый корень $x_2 = 1 - 1/\alpha$, а при $\alpha > 3$ еще два корня $x_{3,4} = \frac{1}{2} + \frac{1 \pm \sqrt{(\alpha+1)(\alpha-3)}}{2\alpha}$.

Это означает, что итерационная последовательность x_n будет стремиться к нулю для $0 \leq \alpha \leq 1$ и к значению $1 - 1/\alpha$ для $1 < \alpha < 3$ при любых начальных значениях x_0 .

Отображение Эно – еще одна двумерная модель, являющаяся обобщением логистического отображения. Здесь x_{n+1} зависит как от x_n , так и от x_{n-1} :

$$x_{n+1} = \lambda x_n(1 - x_n) - b x_{n-1}, \quad (4)$$

где b – некоторый новый коэффициент.

Для того чтобы модель была двумерной, как показано в [2], вводим новое обозначение $y_{n+1} = x_n$. Тогда отображение можно переписать в виде системы:

$$\begin{cases} x_{n+1} = \lambda x_n(1 - x_n) - by_n; \\ y_{n+1} = x_n. \end{cases} \quad (5)$$

Это и есть двумерное представление отображения Эно. Если использовать другое представление квадратичной функции, то это отображение можно записать в виде

$$\begin{cases} x_{n+1} = 1 - \lambda x_n^2 - by_n; \\ y_{n+1} = x_n. \end{cases} \quad (6)$$

Покажем, как можно представить динамику данных двумерных систем с помощью окрестностного моделирования.

2. Окрестностные системы

Рассмотрим определение окрестностных моделей [3]. Окрестностная модель в общем случае описывается набором $NS = (N, X, V, Y, Z, G, F, X[0])$ где:

- 1) $N = (A, O_x, O_v, O_y)$ – структура окрестностной модели, $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ – множество узлов, O_x – окрестности связей узлов по состояниям, O_v – окрестности связей узлов по управлениям, O_y – окрестности связей узлов по выходным воздействиям. Для каждого узла $a_i \in A$ определена своя окрестность по состояниям $O_x[a_i] \subseteq A$, управлениям $O_v[a_i] \subseteq A$ и выходам $O_y[a_i] \subseteq A$; $O_x = \bigcup_{i=1}^n O_x[a_i]$; $O_v = \bigcup_{i=1}^n O_v[a_i]$; $O_y = \bigcup_{i=1}^n O_y[a_i]$;
- 2) $X \in R_n$ – вектор состояний окрестностной модели в текущий момент времени;
- 3) $V \in R_m$ – вектор управлений окрестностной модели в текущий момент времени;
- 4) $Y \in R_l$ – вектор выходов окрестностной модели в текущий момент времени;
- 5) $Z \in R_+^n$ – вектор временных задержек в узлах, где R_+ – множество неотрицательных действительных чисел;
- 6) $G: X_{O_x} \times V_{O_v} \rightarrow X$ – функция пересчета состояний окрестностной модели (в общем случае недетерминированная), где X_{O_x} – множество состояний узлов, входящих в окрестность O_x ; V_{O_v} – множество управлений узлов, входящих в окрестность O_v ;
- 7) $F: X_{O_x} \times V_{O_v} \rightarrow Y$ – функция пересчета выходов окрестностной модели (в общем случае недетерминированная);
- 8) $X[0]$ – начальное состояние модели.

В частных случаях для различных дискретных моделей отдельные составляющие окрестностной модели могут отсутствовать.

Функции G и F могут быть произвольными, например линейными, билинейными, квадратичными, полиномиальными и т. д. В линейном случае G и F можно представить в виде системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} \sum_{x \in O_x[t+1, a_i]} w_x[t+1, a_i, \alpha] x[t+1, \alpha] = \sum_{x \in O_x[t, a_i]} w_x[t, a_i, \alpha] x[t, \alpha] + \\ \sum_{y \in O_y[t+1, a_i]} w_y[t+1, a_i, \gamma] y[t+1, \gamma] = \sum_{x \in O_x[t, a_i]} w_x[t, a_i, \alpha] x[t, \alpha] + \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} + \sum_{\beta \in O_v[t, a_i]} w_v[t, a_i, \beta] v[t, \beta], \\ + \sum_{\beta \in O_v[t, a_i]} w_v[t, a_i, \beta] v[t, \beta], \end{cases}$$

где $O_x[t + 1, a_i]$, $O_x[t, a_i]$ – окрестности узла a_i по x соответственно в моменты времени $t + 1$ и t ; $O_v[t, a_i]$ – окрестность узла a_i по v в момент времени t ; $O_y[t + 1, a_i]$ – окрестность узла a_i по y в момент времени $t + 1$, $a_i \in A$; $x[t + 1, a_i] \in R^n$, $x[t, a_i] \in R^n$ – состояния в узле a_i модели соответственно в моменты времени $t + 1$ и t ; $v[t, a_i] \in R^m$ – вход в узле a_i модели в момент времени t ; $y[t, a_i] \in R^l$ – выход в узле a_i модели в момент времени $t + 1$, $w_x[t + 1, a_i, \alpha] \in R^{c \times n}$, $w_x[t, a_i, \alpha] \in R^{c \times n}$, $w_v[t, a_i, \beta] \in R^{c \times m}$, $w_y[t + 1, a_i, \gamma] \in R^{c \times l}$ – матрицы-параметры; $\alpha, \beta, \gamma \in A$. В матричной форме модель (7) будет иметь вид:

$$\begin{cases} W_x[t + 1] \cdot X[t + 1] = W_x[t] \cdot X[t] + W_v[t] \cdot V[t], \\ W_y[t + 1] \cdot Y[t + 1] = W_x[t] \cdot X[t] + W_v[t] \cdot V[t]. \end{cases} \quad (8)$$

В случае, когда функции G и F являются нелинейными, модель (8) преобразуется к виду:

$$\begin{cases} W_x[t + 1] \cdot X[t + 1] = G(X[t], V[t]), \\ W_y[t + 1] \cdot Y[t + 1] = F(X[t], V[t]). \end{cases} \quad (9)$$

Изменяя составляющие общего описания окрестностной модели, можно получить различные классы дискретных распределенных моделей.

Билинейная окрестностная модель в общем виде описывается уравнением [4]:

$$\sum_{i=1}^r \sum_{\alpha \in O_{u_i}[a]} w_i[a, \alpha] u_i[\alpha] + \sum_{i=1}^r \sum_{\substack{\alpha \in O_{u_i}[a] \\ \beta \in O_{\gamma_i}[a]}} w_i[a, \alpha, \beta] u_i[\alpha] \cdot \gamma_i[\beta] = 0, \quad (10)$$

где $O_{u_i}[a]$, $O_{\gamma_i}[a]$ – окрестности по u_i , γ_i элемента $a \in A = \{a_1, \dots, a_n\}$, $u_i, \gamma_i \in U$; $w_i[a, \alpha]$, $w_i[a, \alpha, \beta]$ ($i = \overline{1, r}$) – некоторые матрицы.

В частности, можно положить $u = x$, $\gamma = v$.

Например, для одного узла уравнение билинейной окрестностной системы будет выглядеть следующим образом:

$$w_{x_1}^{(1)} x_1 + w_{v_1}^{(1)} v_1 + w_{xv_{11}}^{(1)} x_1 v_1 = 0. \quad (11)$$

Для двух узлов модель принимает вид:

$$w_{x_1}^{(1)} x_1 + w_{x_2}^{(1)} x_2 + w_{v_1}^{(1)} v_1 + w_{v_2}^{(1)} v_2 + w_{xv_{11}}^{(1)} x_1 v_1 + w_{xv_{12}}^{(1)} x_1 v_2 + w_{xv_{21}}^{(1)} x_2 v_1 + w_{xv_{22}}^{(1)} x_2 v_2 = 0;$$

$$w_{x_1}^{(2)} x_1 + w_{x_2}^{(2)} x_2 + w_{v_1}^{(2)} v_1 + w_{v_2}^{(2)} v_2 + w_{xv_{11}}^{(2)} x_1 v_1 + w_{xv_{12}}^{(2)} x_1 v_2 + w_{xv_{21}}^{(2)} x_2 v_1 + w_{xv_{22}}^{(2)} x_2 v_2 = 0. \quad (12)$$

И т. д. для большего количества узлов системы.

3. Моделирование распределенных динамических систем

В работе [5] мы описывали, как можно перейти от итерационной модели динамической системы к окрестностной модели. Используя эту методику, приведем систему (2) к окрестностному виду.

Строим окрестностную билинейную распределенную систему из 3 узлов:

$$w_{x_1}^{(1)} x_1 + w_{x_2}^{(1)} x_2 + w_{x_3}^{(1)} x_3 + w_{v_1}^{(1)} v_1 + w_{v_2}^{(1)} v_2 + w_{v_3}^{(1)} v_3 + w_{xv_{11}}^{(1)} x_1 v_1 + w_{xv_{12}}^{(1)} x_1 v_2 + w_{xv_{13}}^{(1)} x_1 v_3 + w_{xv_{21}}^{(1)} x_2 v_1 + w_{xv_{22}}^{(1)} x_2 v_2 + w_{xv_{23}}^{(1)} x_2 v_3 + w_{xv_{31}}^{(1)} x_3 v_1 + w_{xv_{32}}^{(1)} x_3 v_2 + w_{xv_{33}}^{(1)} x_3 v_3 = 0.;$$

$$w_{x_1}^{(2)}x_1 + w_{x_2}^{(2)}x_2 + w_{x_3}^{(2)}x_3 + w_{v_1}^{(2)}v_1 + w_{v_2}^{(2)}v_2 + w_{v_3}^{(2)}v_3 + w_{xv_{11}}^{(2)}x_1v_1 + w_{xv_{12}}^{(2)}x_1v_2 + w_{xv_{13}}^{(2)}x_1v_3 + w_{xv_{21}}^{(2)}x_2v_1 + w_{xv_{22}}^{(2)}x_2v_2 + w_{xv_{23}}^{(2)}x_2v_3 + w_{xv_{31}}^{(2)}x_3v_1 + w_{xv_{32}}^{(2)}x_3v_2 + w_{xv_{33}}^{(2)}x_3v_3 = 0; \quad (13)$$

$$w_{x_1}^{(3)}x_1 + w_{x_2}^{(3)}x_2 + w_{x_3}^{(3)}x_3 + w_{v_1}^{(3)}v_1 + w_{v_2}^{(3)}v_2 + w_{v_3}^{(3)}v_3 + w_{xv_{11}}^{(3)}x_1v_1 + w_{xv_{12}}^{(3)}x_1v_2 + w_{xv_{13}}^{(3)}x_1v_3 + w_{xv_{21}}^{(3)}x_2v_1 + w_{xv_{22}}^{(3)}x_2v_2 + w_{xv_{23}}^{(3)}x_2v_3 + w_{xv_{31}}^{(3)}x_3v_1 + w_{xv_{32}}^{(3)}x_3v_2 + w_{xv_{33}}^{(3)}x_3v_3 = 0.$$

Проводим следующие преобразования:

$$x_1 = x_n; \quad v_1 = x_n; \quad x_2 = y_{n+1}; \quad v_2 = y_{n+1}; \quad v_3 = x_{n+1}.$$

Коэффициенты для первого узла:

$$\begin{aligned} w_{x_1}^{(1)} &= \alpha; \quad w_{x_2}^{(1)} = 0; \quad w_{x_3}^{(1)} = 0; \\ w_{v_1}^{(1)} &= 0; \quad w_{v_2}^{(1)} = -1; \quad w_{v_3}^{(1)} = 0; \\ w_{xv_{11}}^{(1)} &= -\alpha; \quad w_{xv_{12}}^{(1)} - w_{xv_{33}}^{(1)} = 0. \end{aligned}$$

Коэффициенты для второго узла:

$$\begin{aligned} w_{x_1}^{(2)} &= 0; \quad w_{x_2}^{(2)} = 0; \quad w_{x_3}^{(2)} = 0; \\ w_{v_1}^{(2)} &= 0; \quad w_{v_2}^{(2)} = \alpha; \quad w_{v_3}^{(2)} = -1; \\ w_{xv_{11}}^{(2)} - w_{xv_{21}}^{(2)} &= 0; \quad w_{xv_{22}}^{(2)} = -\alpha; \quad w_{xv_{23}}^{(2)} - w_{xv_{33}}^{(2)} = 0. \end{aligned}$$

Коэффициенты для третьего узла:

$$w_{x_1}^{(3)} - w_{xv_{33}}^{(3)} = 0.$$

Получаем:

$$\begin{cases} \alpha x_1 - v_2 - \alpha x_1 v_1 = 0; \\ \alpha v_2 - v_3 - \alpha x_2 v_2 = 0; \\ 0 = 0 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} v_2 = \alpha x_1 - \alpha x_1 v_1; \\ v_3 = \alpha v_2 - \alpha x_2 v_2; \\ 0 = 0. \end{cases} \quad (14)$$

Здесь третий узел является фиктивным, он дает нам необходимое значение $x_{n+1} = v_3$. Полученная окрестностная система (14) полностью соответствует системе (2) для случая $\beta = \alpha$, является частным случаем общей модели окрестностной распределенной системы.

Для анализа поведения различных дискретных динамических систем с помощью окрестного подхода была разработана итерационная программа, позволяющая считать значения переменных на любом шаге итерационной последовательности. Программа предусматривает параметрическую идентификацию w_i , позволяет рассчитывать значения переменных (управления) для нескольких узлов.

Проведя расчеты по этой программе, получаем следующие результаты (см. табл. 1). Для исследования мы взяли начальное значение $x_0 = 0,85$, для первого случая ($0 \leq \alpha \leq 1$) можно положить, например, $\alpha = 0,5$, а для второго ($1 < \alpha < 3$) $\alpha = 2,3$, $n = 31$.

Отдельно мы исследуем поведение системы при $\alpha = 4$. Как известно, при данном значении параметра отображение Ферхюльста–Пирла не стремится при $n \rightarrow \infty$ к какому-либо стационарному или периодическому значению, выдавая с каждой итерацией различные значения x_n . Такое поведение называется динамическим (или детерминированным) хаосом [6].

Расчеты показывают, что итерационная последовательность системы (14) окрестностного моделирования системы динамических уравнений (3) сходится к своим стационарным значениям, причем при $\alpha = 2, 3$ система достигает своего стационарного состояния $f(x) = x_n = 0,565217391$ на 18 итерации, а при $\alpha = 0,5$ последовательность, как видно из табл. 1, стремится к нулю при возрастании n .

Таблица 1

Значения x_n системы (14) для параметров $\alpha = 0,5$ и $\alpha = 2,3$; $x_0 = 0,85$

$\alpha = 0,5$				$\alpha = 2,3$			
n	x_n	n	x_n	n	x_n	n	x_n
0	0,85	9	0,000219862	0	0,85	9	0,56522391
1	0,06375	10	0,000109907	1	0,29325	10	0,565215436
2	0,029842969	11	5,49475E-05	2	0,476685206	11	0,565217978
3	0,014476183	12	2,74722E-05	3	0,573749767	12	0,565217215
4	0,007133312	13	1,37357E-05	4	0,562490235	13	0,565217444
5	0,003541214	14	6,86777E-06	5	0,566018432	14	0,565217375
6	0,001764337	15	3,43386E-06	6	0,564975603	15	0,565217396
7	0,000880612	16	1,71693E-06	7	0,565289793	16	0,56521739
8	0,000439918	17	8,58461E-07	8	0,565195659	17	0,565217392

Аналогичные результаты получаются методами математического моделирования системы (2) без применения окрестностного подхода.

Помимо этого были рассчитаны результаты моделирования системы (2) для случая $\alpha = 4$. Как и предполагалось, последовательность оказалась непериодической, на рис. 1 показана последовательность значений первых 55 итераций. Дальнейшие итерации также не приводят к стационарному или периодическому решению.

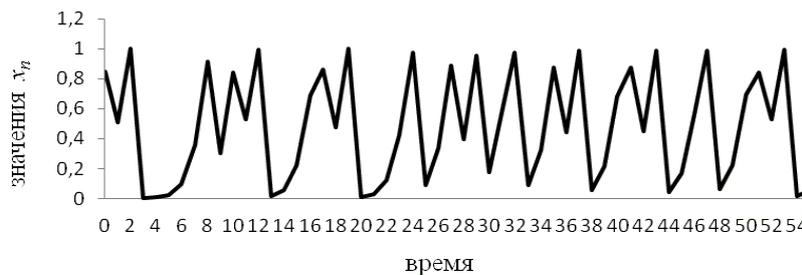


Рис. 1. Хаотический сценарий поведения системы (14) при $\alpha = 4$ и $x_0 = 0,85$

Таким образом, система (14) является частным случаем общей модели окрестностной распределенной системы.

Теперь рассмотрим преобразование системы (6) к окрестностному виду. Также строим окрестностную билинейную распределенную систему из 3 узлов (см. (13)). Затем проводим следующие преобразования:

$$x_1 = x_n; \quad v_1 = x_n; \quad x_2 = y_n; \quad v_2 = x_{n+1}; \quad v_3 = y_{n+1}; \quad x_3 = 1.$$

Коэффициенты для первого узла:

$$\begin{aligned} w_{x_1}^{(1)} &= 0; \quad w_{x_2}^{(1)} = b; \quad w_{x_3}^{(1)} = -1; \\ w_{v_1}^{(1)} &= 0; \quad w_{v_2}^{(1)} = 1; \quad w_{v_3}^{(1)} = 0; \\ w_{xv_{11}}^{(1)} &= \lambda; \quad w_{xv_{12}}^{(1)} - w_{xv_{13}}^{(1)} = 0. \end{aligned}$$

Коэффициенты для второго узла:

$$\begin{aligned} w_{x_1}^{(2)} &= -1; w_{x_2}^{(2)} = 0; w_{x_3}^{(2)} = 0; \\ w_{v_1}^{(2)} &= 0; w_{v_2}^{(2)} = 0; w_{v_3}^{(2)} = 1; \\ w_{xv_{11}}^{(2)} - w_{xv_{33}}^{(2)} &= 0. \end{aligned}$$

Коэффициенты для третьего узла:

$$w_{x_1}^{(3)} - w_{xv_{33}}^{(3)} = 0.$$

Получаем:

$$\begin{cases} bx_2 - x_3 + v_2 - \lambda x_1 v_1 = 0; \\ -x_1 + v_3 = 0; \\ 0 = 0 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} v_2 = x_3 - \lambda x_1 v_1 - bx_2; \\ v_3 = x_1; \\ 0 = 0. \end{cases} \quad (15)$$

Рассчитывая по программе первые 16 итераций для значений $\lambda = 0,5$ и $\lambda = 1,5$ (при $b = 0,3$, $x_0 = 0,7$) получаем результаты, представленные в табл. 2.

Таблица 2

Значения x_n системы (15) для параметров $\lambda = 0,5$ и $\lambda = 1,5$; $b = 0,3$; $x_0 = 0,7$

$\lambda = 0,5$				$\lambda = 1,5$			
n	x_n	n	x_n	n	x_n	n	x_n
0	0,7	9	0,622257645193105	0	0,7	9	0,108625645423006
1	0,755	10	0,621040516805360	1	0,265	10	0,755461203425350
2	0,50498750000	11	0,620477044685134	2	0,68466250000	11	0,111329861551782
3	0,645993812421875	12	0,621191963467793	3	0,217355891640625	12	0,754770131862687
4	0,639849747156326	13	0,620917158855974	4	0,723735874553663	13	0,112084113606439
5	0,601498006805431	14	0,620873351878775	5	0,149102808333879	14	0,754724687656782
6	0,62714514975765	15	0,620982992806615	6	0,74953176645433	15	0,111960734680127
7	0,622895078526099	16	0,620928055758837	7	0,112572354113621	16	0,754779784537795
8	0,617857315646688	17	0,622257645193105	8	0,756131667697678	17	0,108625645423006

Видно, что при $\lambda = 0,5$ последовательность стремится к своей неподвижной точке, в то время как при $\lambda = 1,5$ она стремится к циклу периода 2. Это подтверждается и графиком бифуркационной диаграммы, представленной авторами [7] для отображения Эно.

Заключение.

Основываясь на результатах расчетов, можно сделать вывод, что окрестностное моделирование обобщает рассмотрение дискретных динамических систем. В работах [7] и [8] было рассмотрено применение окрестностных систем к моделированию транспортных систем, систем Петри.

Распределенные итерационные динамические системы с нелинейной динамикой обладают интересными свойствами, например, наличием различного поведения в зависимости от значения параметров. Окрестностное моделирование позволяет реализовывать задачу построения таких сложных систем, нахождения параметров, при которых система меняет свое поведение.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Думачев В.Н., Родин В.А.* Эволюция антагонистически-взаимодействующих популяций на базе двумерной модели Ферхюльста-Пирла // Математическое моделирование. 2005. Т. 17. № 7. С. 11-22.
2. *Кузнецов А.П., Савин А.В., Тюрюкина Л.В.* Введение в физику нелинейных отображений. Саратов: Изд-во «Научная книга», 2010. 134 с.
3. *Блюмин С.Л., Шмырин А.М.* Окрестностные системы. Липецк: ЛЭГИ, 2005. 132 с.
4. *Блюмин С.Л., Шмырин А.М., Шмырина О.А.* Билинейные окрестностные системы: монография. Липецк: ЛГТУ, 2006. 131 с.
5. *Щербаков А.П., Шмырин А.М.* Моделирование логистических отображений билинейными окрестностными системами // Современные проблемы информатизации в экономике и обеспечении безопасности: сб. трудов. Вып. 17. Воронеж: Издательство «Научная книга», 2012. С. 119-123.
6. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос. М.: Физматлит, 2001. 296 с.
7. *Корчагин В.А., Шмырин А.М., Ризаева Ю.Н., Митина О.А.* Окрестностное моделирование транспортных систем // Успехи современного естествознания. 2011. № 4. С. 94-100.
8. *Блюмин С.Л., Шмырин А.М., Седых И.А., Филоненко В.Ю.* Окрестностное моделирование сетей Петри. Липецк: ЛЭГИ, 2010. 124 с.

Поступила в редакцию 10 ноября 2012 г.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 11-08-97525 р-центр_а).

Shmyrin A.M., Sedykh I.A., Tyurin V.M., Vasilyev V.B., Shcherbakov A.P. NEIGHBORHOOD MODELING OF TWO-DIMENSIONAL NONLINEAR DYNAMIC SYSTEMS

Transition questions from the distributed dynamic systems to neighborhood systems, their modeling by bilinear neighborhood systems are considered, it is shown that dynamic systems can be analyzed with application of neighborhood systems approach.

Key words: neighborhood systems; dynamic system; discrete display; iterative sequence.

УДК 378.51

К ВОПРОСУ О ВНЕДРЕНИИ ИНТЕРАКТИВНЫХ ФОРМ ОБУЧЕНИЯ ПРИ ИЗУЧЕНИИ МАТЕМАТИКИ В ВУЗЕ

© А. В. Щербакова, Е. А. Петрова

Ключевые слова: интерактивная форма обучения; лекция; тренинг; анализ конкретных ситуаций; кейс-метод; сетевой информационный образовательный ресурс.

Рассматриваются особенности интерактивного обучения и выбор интерактивных форм при изучении математики в вузе.

Стратегия российского высшего образования в соответствии с федеральными государственными образовательными стандартами (ФГОС) требует от преподавателя неизбежного перехода к активному использованию интерактивных форм обучения.

Прежде чем рассматривать интерактивные формы обучения (выделенные в ФГОС ВПО), которые возможно (на наш взгляд) использовать в учебном процессе вуза при обучении